Definición: Si **a** es la coordenada de un punto del eje numérico real, la distancia no dirigida de **a** al origen, que es una cantidad no negativa, se representa por $|a|$ y se denomina **valor absoluto**.

El valor absoluto de un número nunca es negativo

El valor absoluto se define de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si x es positivo} \\ 0 & \text{si x es 0} \\ -x & \text{si x es negativo} \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto:

1. El valor absoluto de cero es cero:

$$|x| = 0, \text{sí y sólo si } x = 0$$

2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x es igual al valor absoluto de $-x$

$$|x| = |-x| \quad \textbf{Para todo } x \in \mathbb{R}$$

Ej: $\left|\sqrt{2}\right| = \left|-\sqrt{2}\right|$, $\quad |8| = |-8|$

3. Si $a \geq 0$ **y** $|x| = a$**, entonces** $x = a$ **ó** $x = -a$

Ejemplo: $|x| = 2$ implica que x=2 ó x=-2

$|x+5| = 3$ implica que x+5=3 ó x+5=-3

$|2y-1| = 1$ implica que 2y-1=1 ó 2y-1=-1

4. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$|x| + |y| \geq |x+y|$$

Ejemplo:

Primer caso:

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 5 \end{matrix} \begin{cases} |2| + |5| = 2 + 5 = 7 \\ |2+5| = |7| = 7 \end{cases} \text{Se cumple: } |2| + |5| = |2+5|$$

Segundo caso:

$$\begin{matrix} x = -2 \\ y = 5 \end{matrix} \begin{cases} |-2| + |5| = 2 + 5 = 7 \\ |-2+5| = |3| = 3 \end{cases} \text{Se cumple: } |\text{-}2| + |5| > |-2+5|$$

Tercer caso:

$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = -5 \end{matrix} \begin{cases} |2| + |-5| = 2 + 5 = 7 \\ |2-5| = |-3| = 3 \end{cases} \text{Se cumple: } |2| + |-5| > |2-5|$$

Cuarto Caso

$$\begin{matrix} x = -2 \\ y = -5 \end{matrix} \begin{cases} |-2| + |-5| = 2 + 5 = 7 \\ |-2-5| = |-7| = 7 \end{cases} \text{Se cumple:} |\text{-}2| + |-5| = |-2-5|$$

5. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y| \Leftrightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

6. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \qquad y \neq 0$$

Ejemplos:

a) $|7| = 7$

b) $|-8| = |-8| = 8$

c) $|3-10| = |-7| = 7$

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} &|3x+1| = 4 \\ &a) 3x + 1 = 4 \\ &3x = 4 - 1 \\ &3x = 3 \\ &x = \frac{3}{3} \to \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|3x+1| = 4 \\ &b) 3x + 1 = -4 \\ &3x = -4 - 1 \\ &3x = -5 \\ &\boxed{x = -\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

Ejercicios:

1. Efectuar las siguientes expresiones mediante las propiedades del valor absoluto

$a)$ $|-15| = ?$

$b)$ $\left|\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right| = ?$

$c)$ $|-5| + |9| + |-56| = ?$

$d)$ $\left|-\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{9}{20}\right| = ?$

2. Determinar si se cumple la propiedad del valor absoluto $|x| + |y| \geq |x+y|$ para:

$a)$ $|-6| + |-8| \geq |6+8|$

$b)$ $|15| + |-25| \geq |15+25|$

3. Resolver los siguientes Ejercicios

1. $|3x| = 6$

2. $2|7-x| = 1$

3. $|x+1| + |-5| = 10$

4. $4x + |7x-4| = 3$

5. $|3x-25| = 13$

6. $|5x+9| = 17$

7. $\left|7x - \frac{5x-4}{2}\right| = 3$

8. $1 - \left|\frac{5x+1}{7}\right| = -\frac{1}{3}x$

9. $\left|x - 3\sqrt{3}\right| - 10 = \sqrt{81}$

10. $\frac{|2x+6|}{|x-4|} = 4$

11. $\frac{3}{2}|x+7| - x = 11$

12. $\left|\frac{10x-6}{3}\right| + x = 2$